

НЕРАВЕНСТВА БЕЛЛА

**квантовое дальноедействие
и абсолютная случайность**

Классический детерминизм:

Будущее состояние замкнутой физической системы однозначно предопределено её текущим состоянием.

1. Единственность состояния.
2. Единственность изменения.

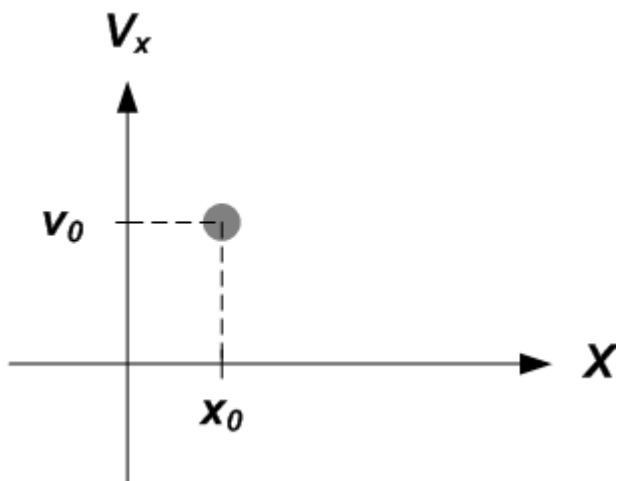


Исход измерения предопределён на любой момент времени

Состояние в момент $t_0 = 0$:

$$x = x_0$$

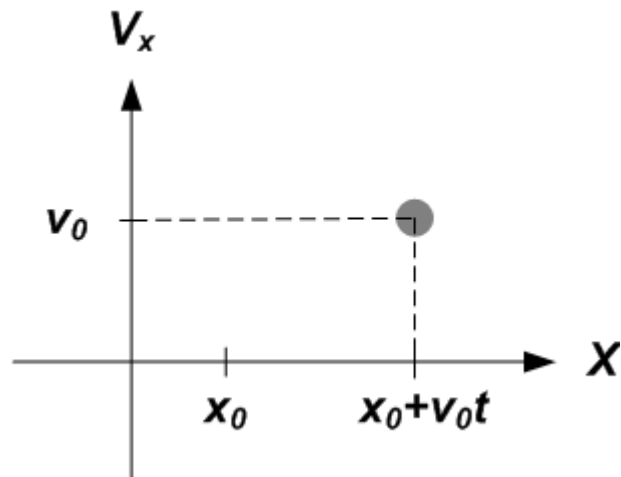
$$v_x = v_0$$



Состояние в момент t :

$$x = x_0 + v_0 t$$

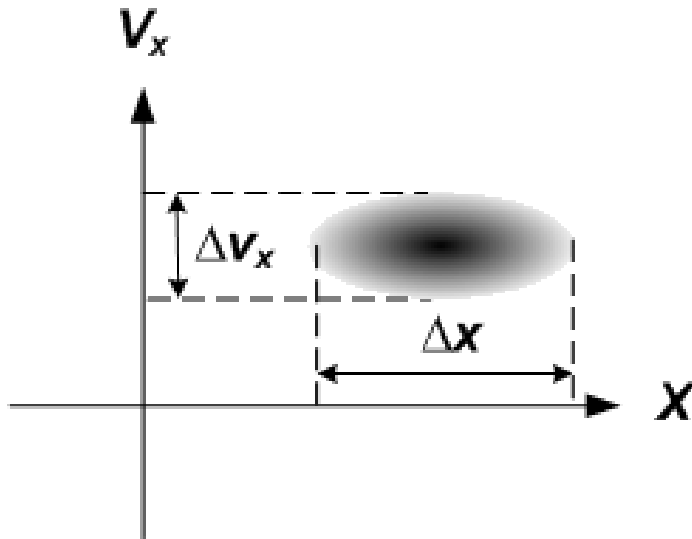
$$v_x = v_0$$



Квантовая случайность:

Физическая система может существовать во множестве состояний одновременно.

Состояние в момент $t_0 = 0$:



Исход измерения – «продукт» случайного выбора

Принцип неопределённости Гейзенберга:

Чем точнее определена координата частицы, тем хуже определён её импульс

$$\Delta x * \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Классическая трактовка принципа неопределённости:

Принципиальная невозможность невозмущающего измерения

В любой момент у частицы существует и точное значение координаты, и точное значение импульса. Но мы не можем точно измерить и то, и другое, потому что измеряя координату, мы неизбежно и непредсказуемо изменяем импульс, и наоборот.

Квантовая трактовка принципа неопределённости:

Объективная неопределённость

Частица объективно «несёт в себе» множество значений координаты и множество значений импульса. Какое значение будет получено при измерении – не predetermined, выбор абсолютно случайный. Предопределена лишь вероятность получения того или иного значения.

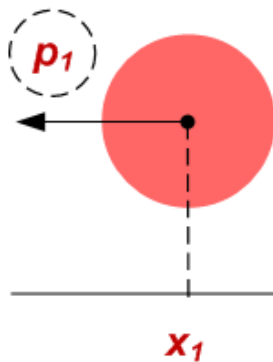
Парадокс ЭПР

Исходная частица с нулевым импульсом



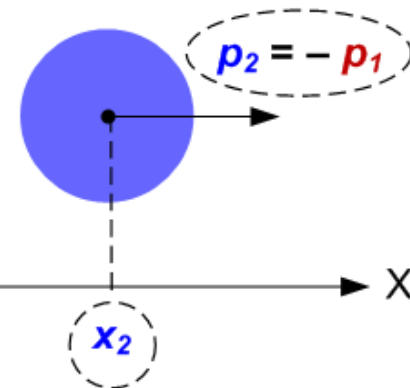
Распад на две одинаковых частицы –
ЭПР-пара

1. Точное измерение p_1



$$p_1 + p_2 = 0$$

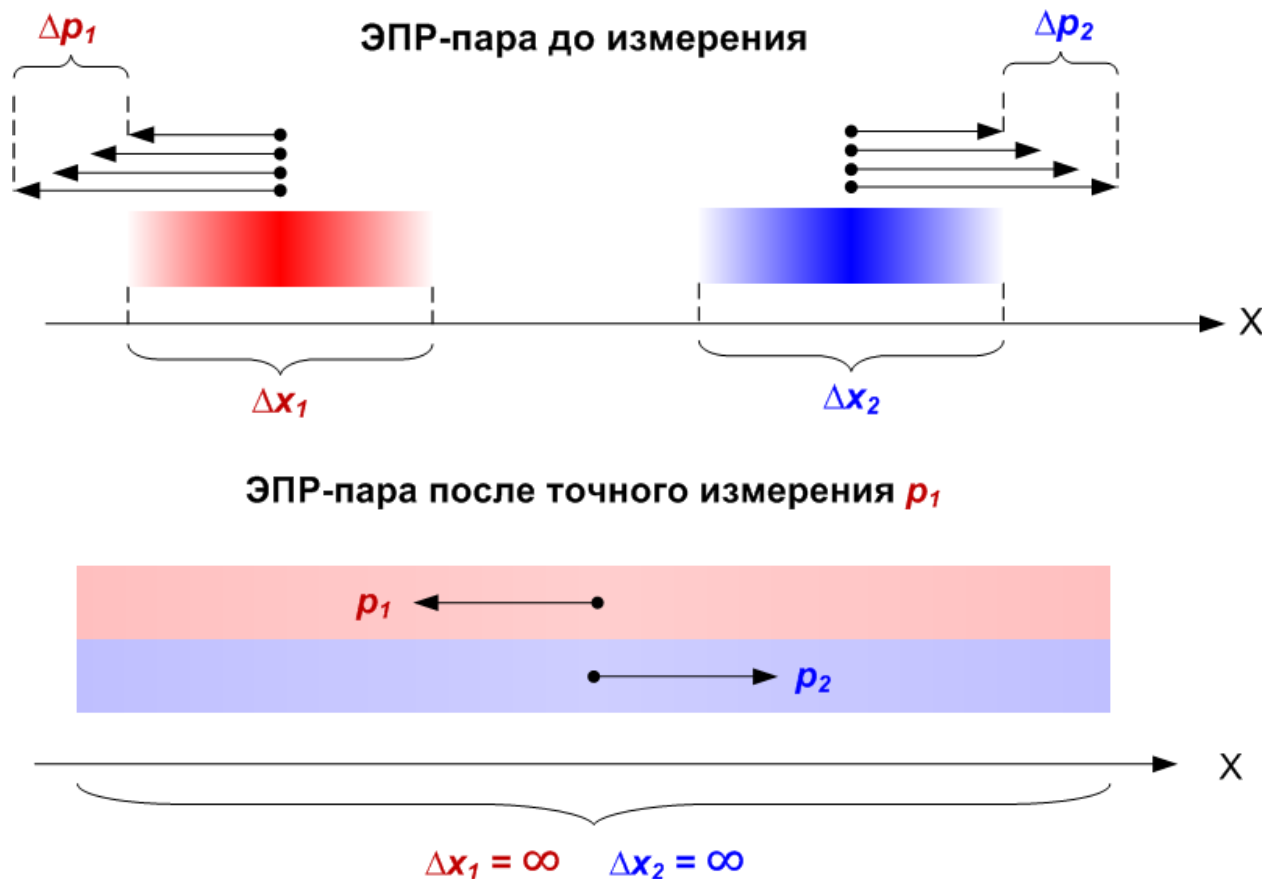
2. Точное вычисление p_2



3. Точное измерение x_2

ЭПР: после шага 3 мы точно знаем импульс и координату **синей частицы**

Возражение Борна и Бора



ББ: в момент измерения происходит взаимодействие частиц ЭПР-пары. При точном измерении импульса **красной частицы**, **синяя частица** немедленно приобретает такой же по величине, но противоположный по направлению импульс

ЭПР: Взаимодействие со сверхсветовой скоростью?!

Принцип локально реализма:

Любое взаимодействие может быть только локальным и передаваться только посредством материальных носителей

ББ: Да.

ЭПР: Невозможно! Исходы обеих измерений предопределены скрытыми параметрами.

ББ: Скрытых параметров не существует, исход первого измерения абсолютно случаен.

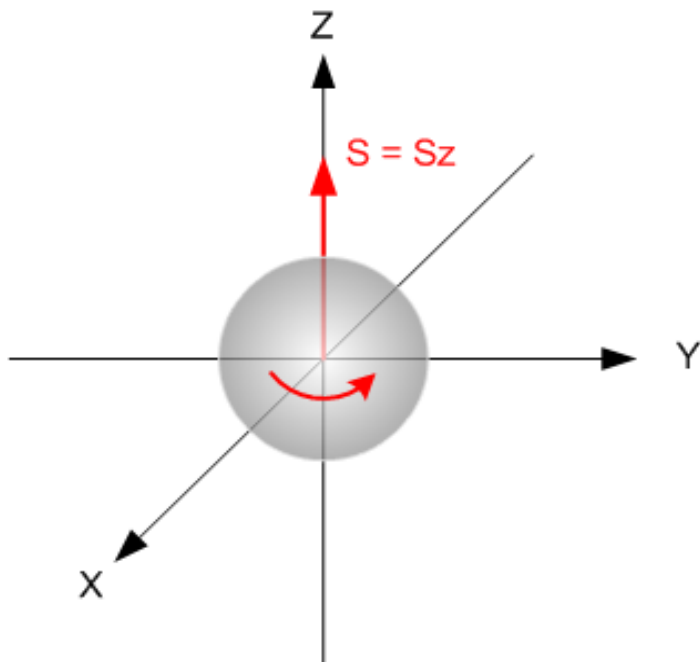
Джон Белл:

Надо многократно измерить спин частиц ЭПР-пар в разных базисах. Я тут посчитал, и получается, что в некоторых комбинациях приборов «программа» и «дальнодействие» предсказывают разную статистику исходов.

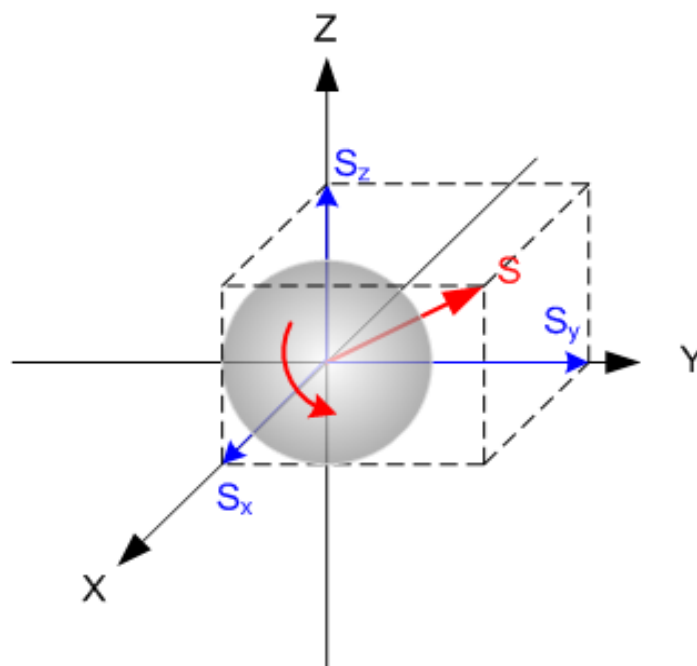
Импульс пропорционален массе и скорости тела: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Момент импульса пропорционален
моменту инерции и угловой скорости: $\mathbf{S} = J\boldsymbol{\omega}$

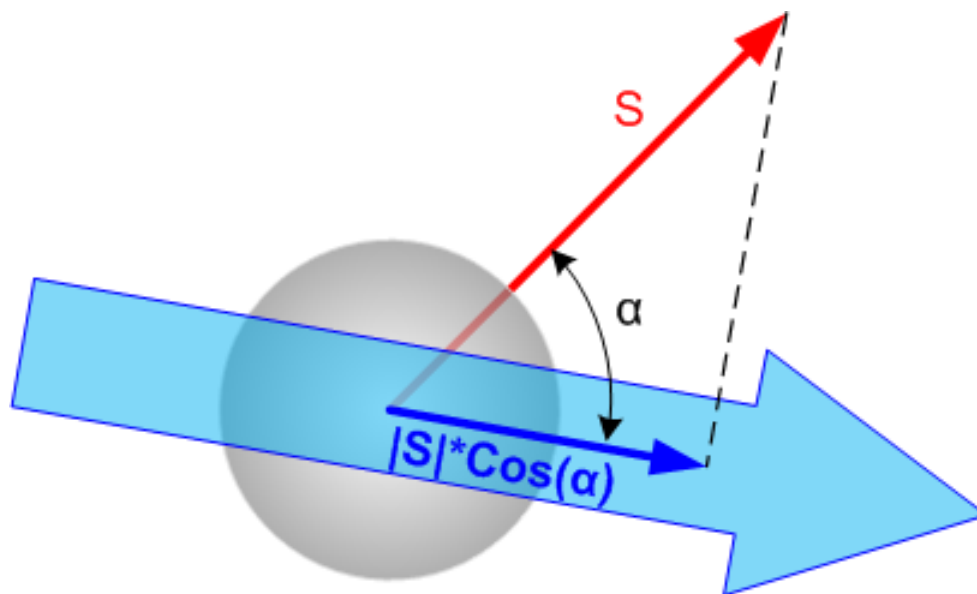
Вращение вокруг оси Z
против часовой стрелки



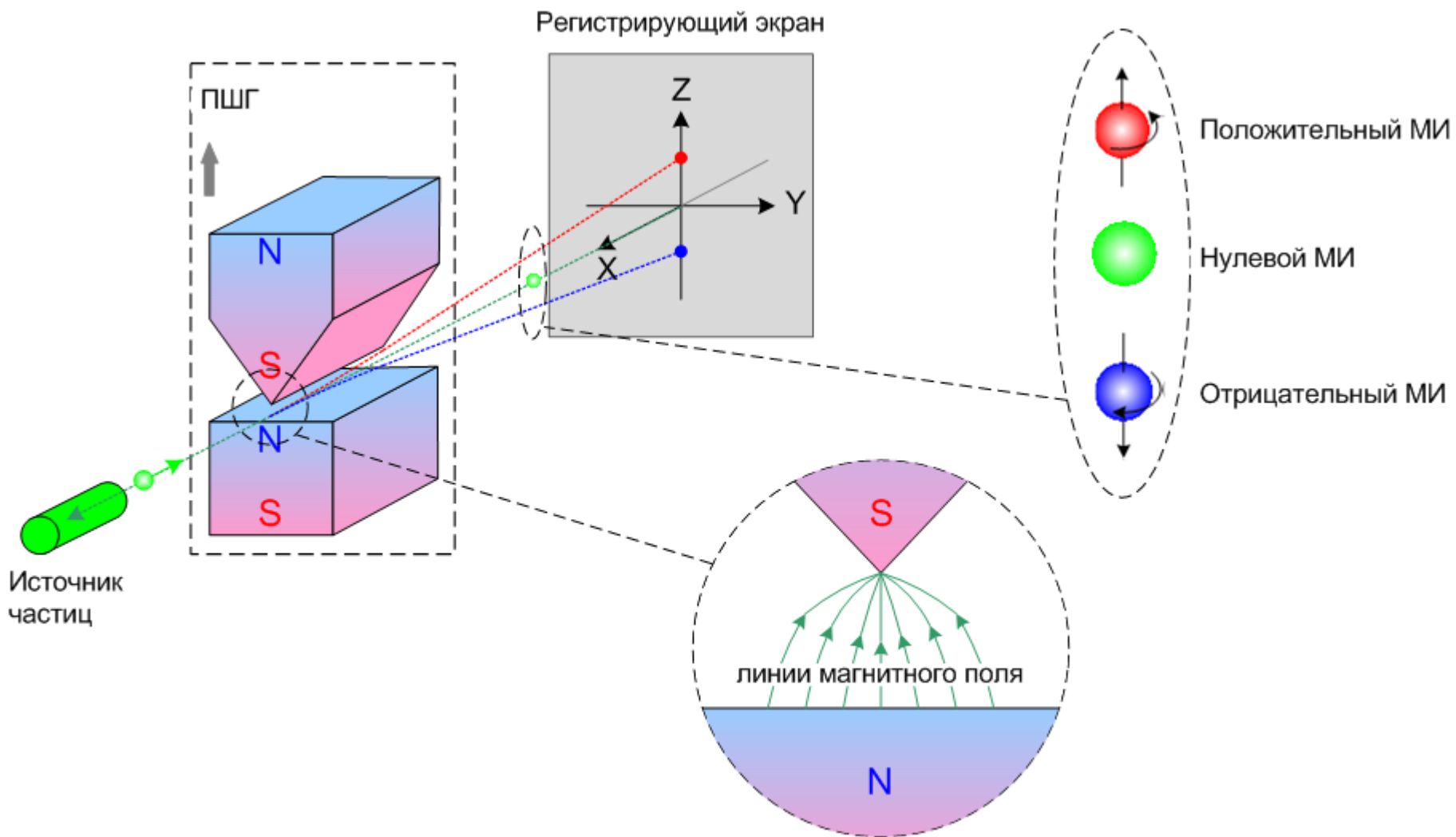
Проекции момента импульса
при произвольном вращении



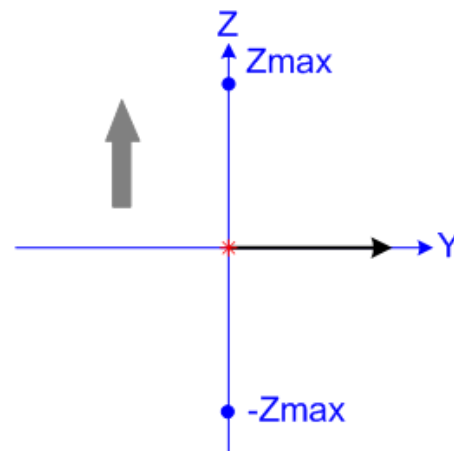
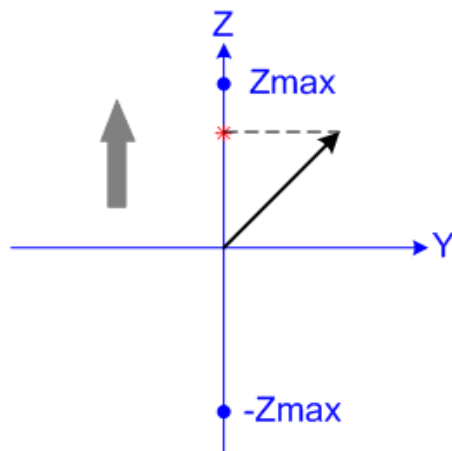
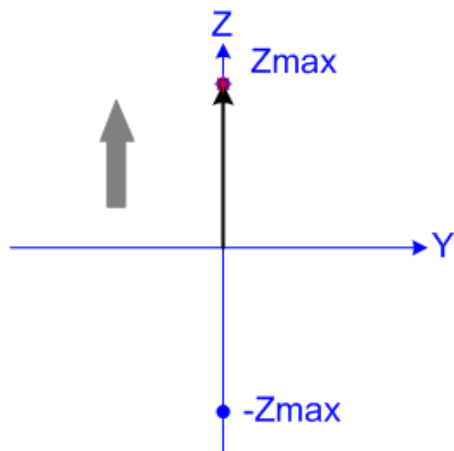
Исход измерения момента импульса пропорционален абсолютной величине (модулю) момента импульса и косинусу угла между направлением оси вращения и собственным направлением прибора.



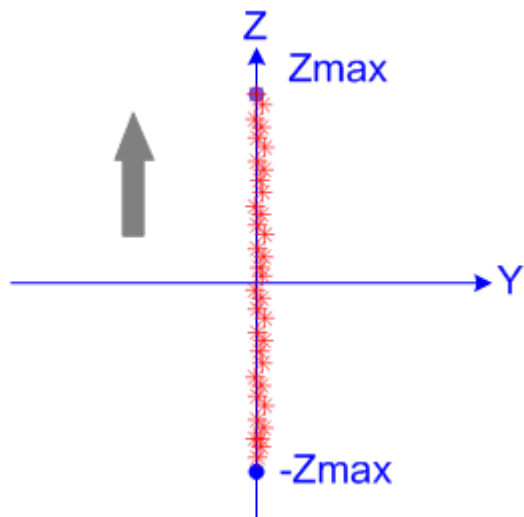
Прибор Штерна - Герлаха



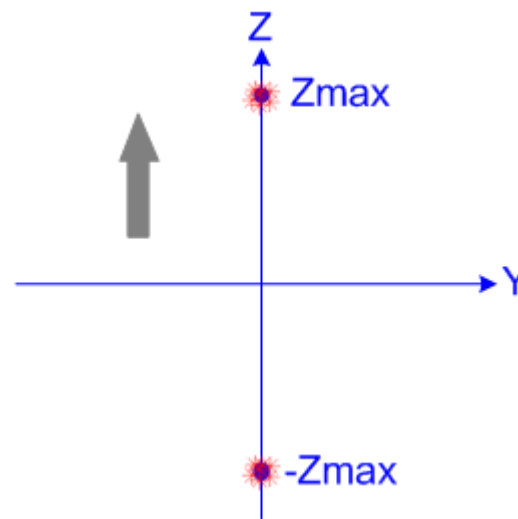
Ожидаемый исход измерения при различных ориентациях вектора момента импульса



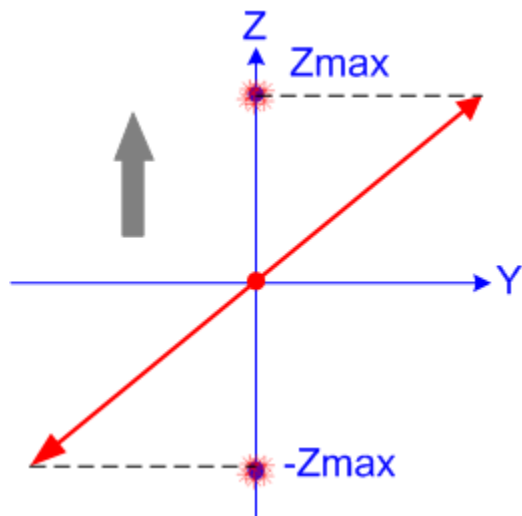
Ожидаемая статистика исходов



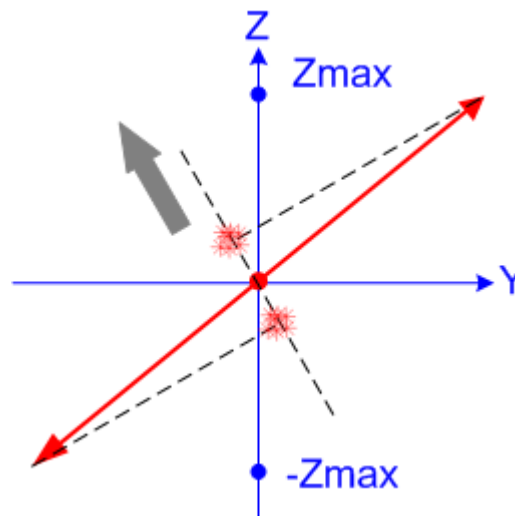
Реальная статистика исходов



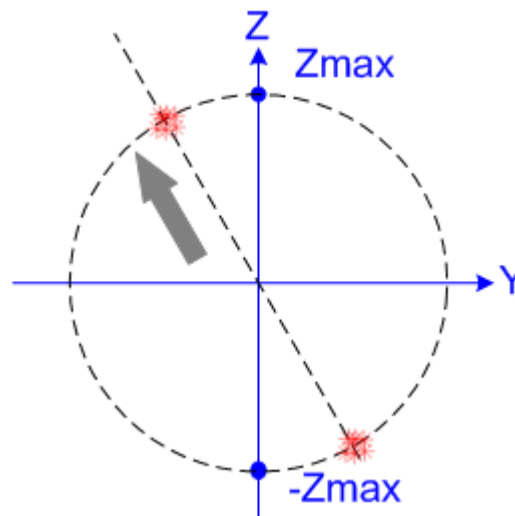
Предположение
о поляризации источника



Ожидаемая статистика исходов
при поворнутом приборе



Реальная статистика исходов
при поворнутом приборе

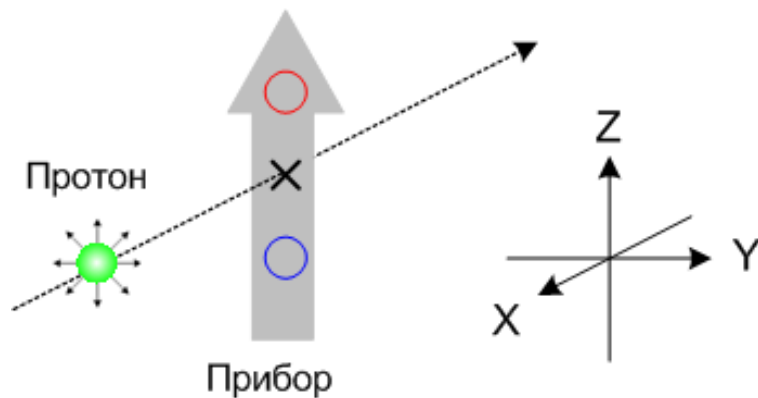


Только два возможных исхода:

$$+\frac{\hbar}{2} \approx +0,527 \times 10^{-34} [\text{Дж} \times \text{с}]$$

$$-\frac{\hbar}{2} \approx -0,527 \times 10^{-34} [\text{Дж} \times \text{с}]$$

До входа протона в прибор



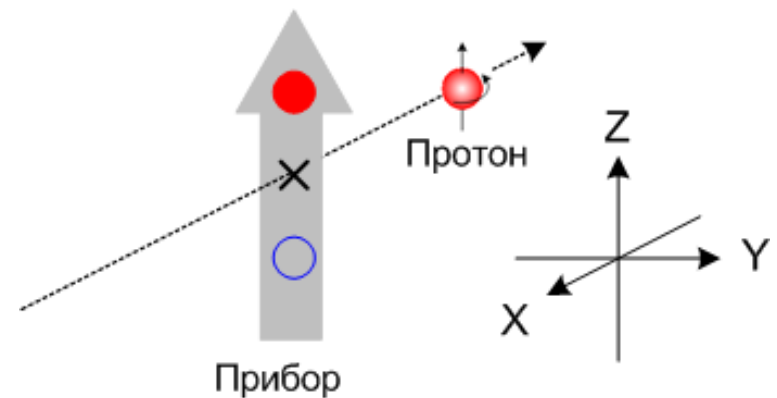
Постоянная Планка

$$h \approx 6,626 \times 10^{-34} [\text{Дж} \times \text{с}]$$

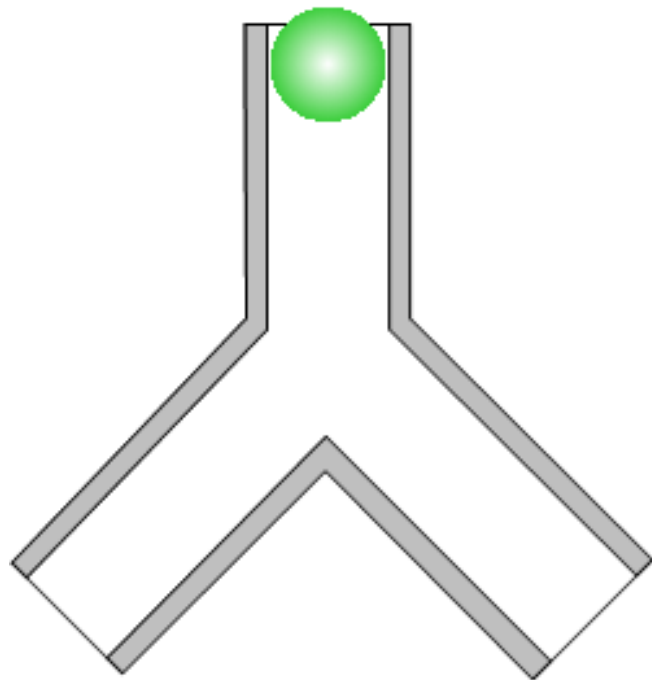
Приведённая постоянная Планка
(постоянная Дирака)

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,055 \times 10^{-34} [\text{Дж} \times \text{с}]$$

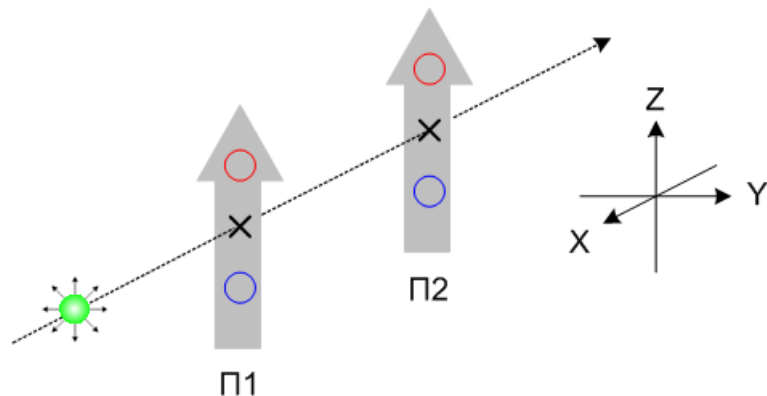
После выхода протона из прибора



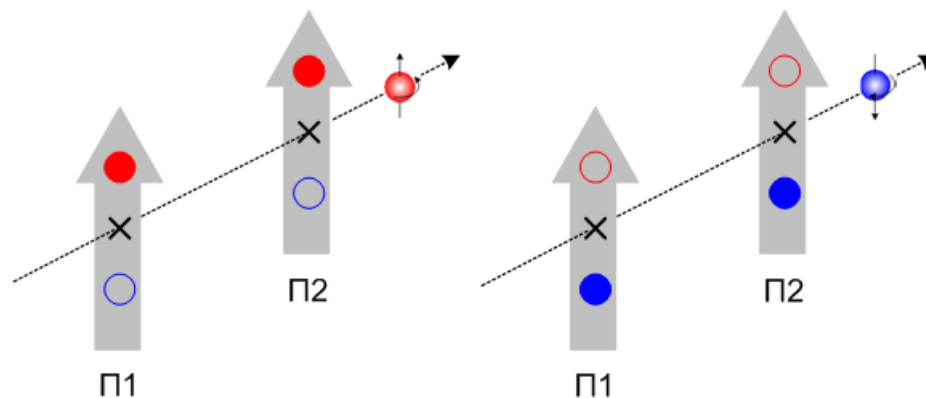
Случайный (псевдослучайный) выбор?



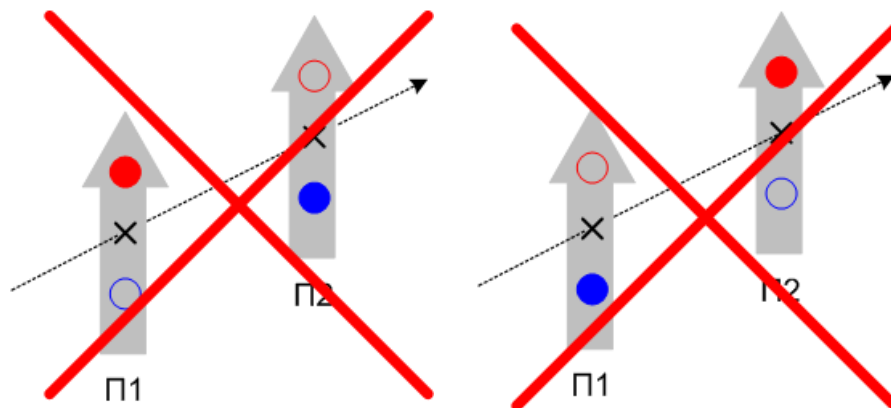
Приборы направлены
одинаково



Возможные исходы

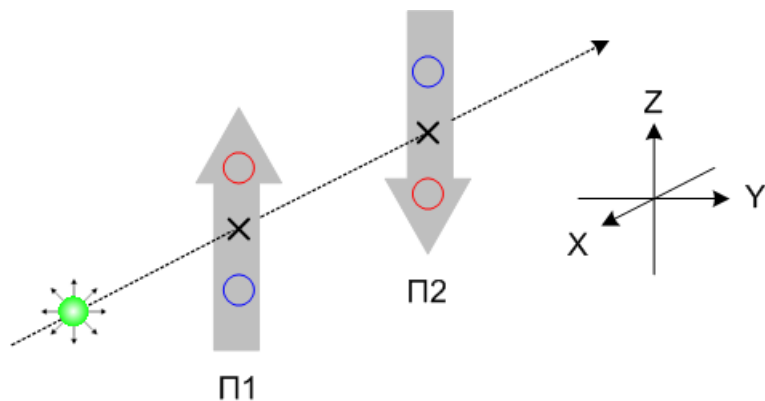


Невозможные исходы

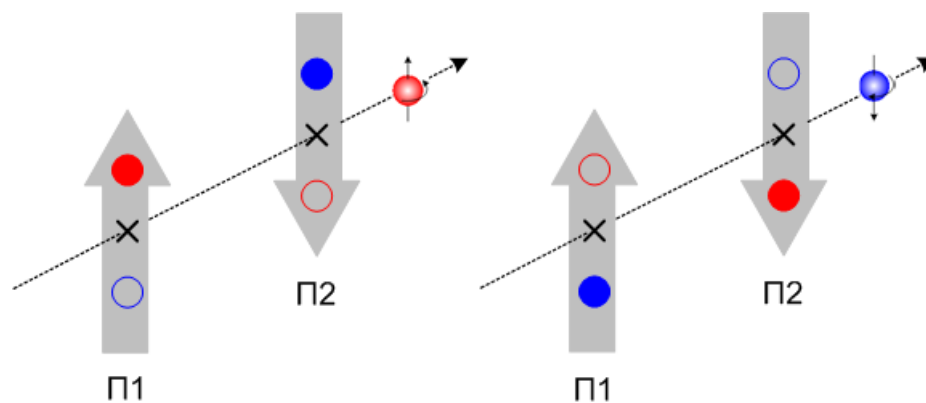


**Результат эксперимента: полная корреляция исходов.
Предположение о псевдослучайном выборе не подтверждается**

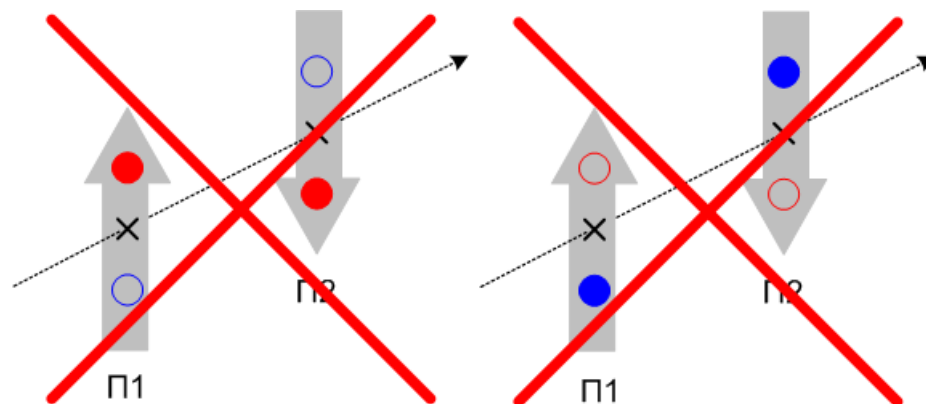
Приборы направлены
противоположно



Возможные исходы



Невозможные исходы



Результат эксперимента: полная антикорреляция исходов

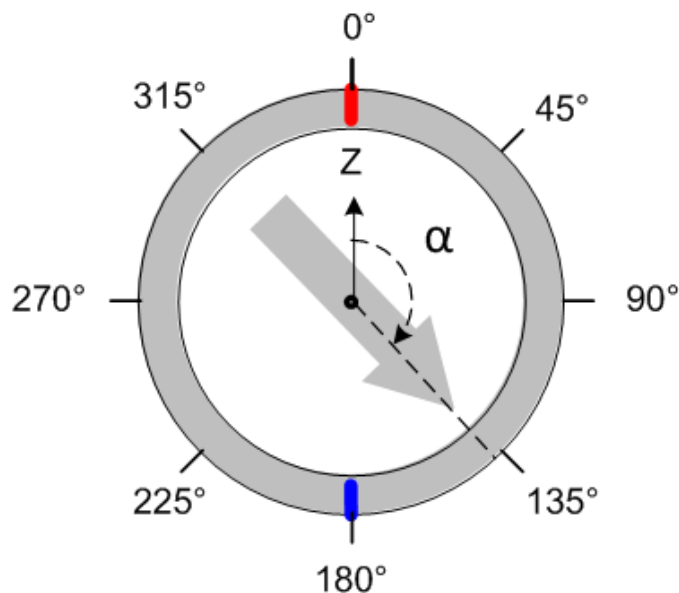
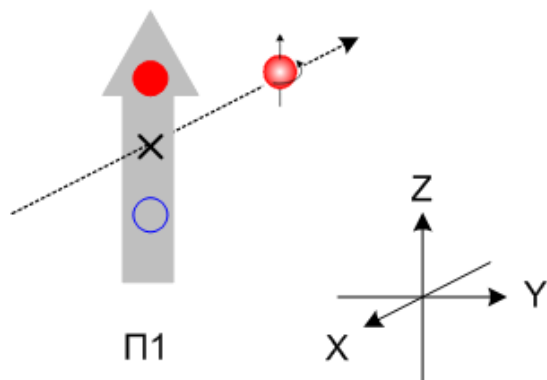
Скрытый параметр?

1. Бинарный характер икс-параметра: **«плюс»** либо **«минус»**

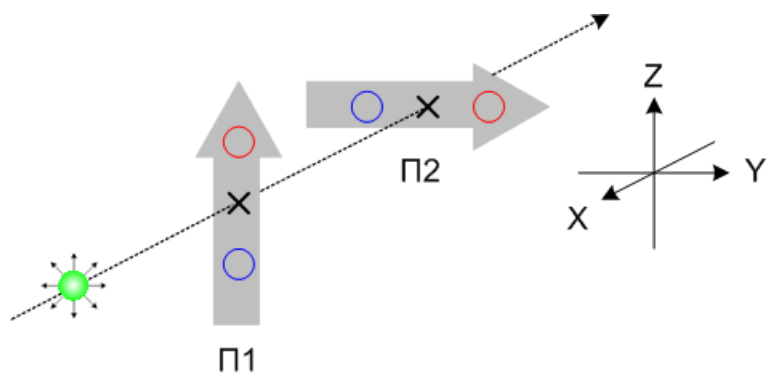
2. Определённое значение для двух базисов:

«+» для прибора с совпадающим направлением;

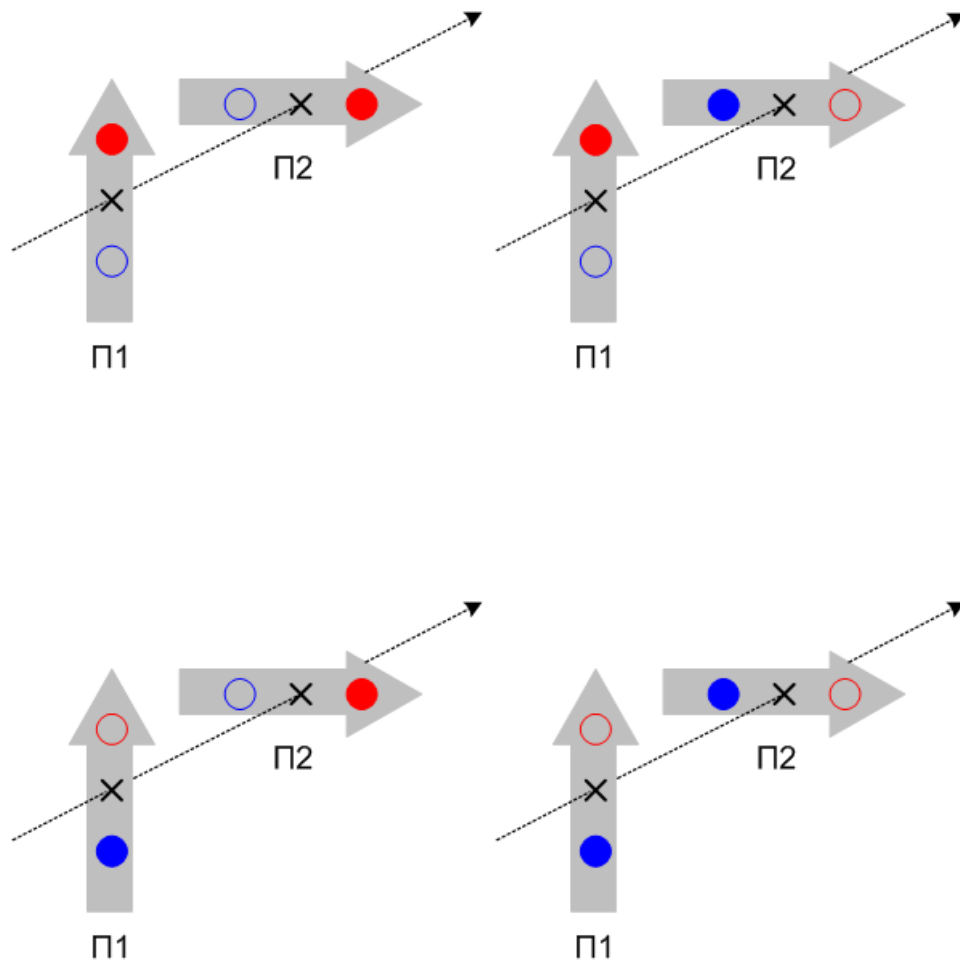
«-» для прибора с противоположным направлением



Приборы направлены
перпендикулярно

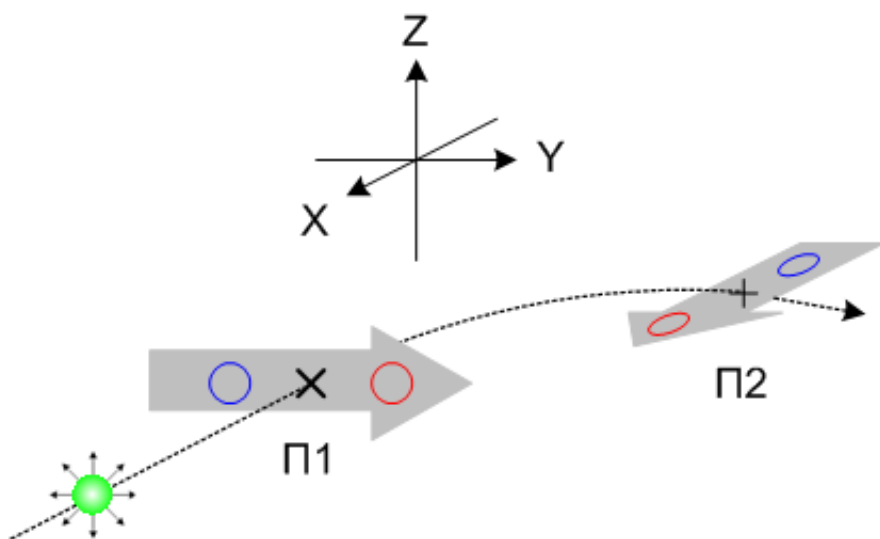


Возможные исходы



Результат эксперимента: корреляция исходов отсутствует

Приборы направлены
перпендикулярно



Возможные исходы:

$$[\Pi_1^+ \Pi_2^+]$$

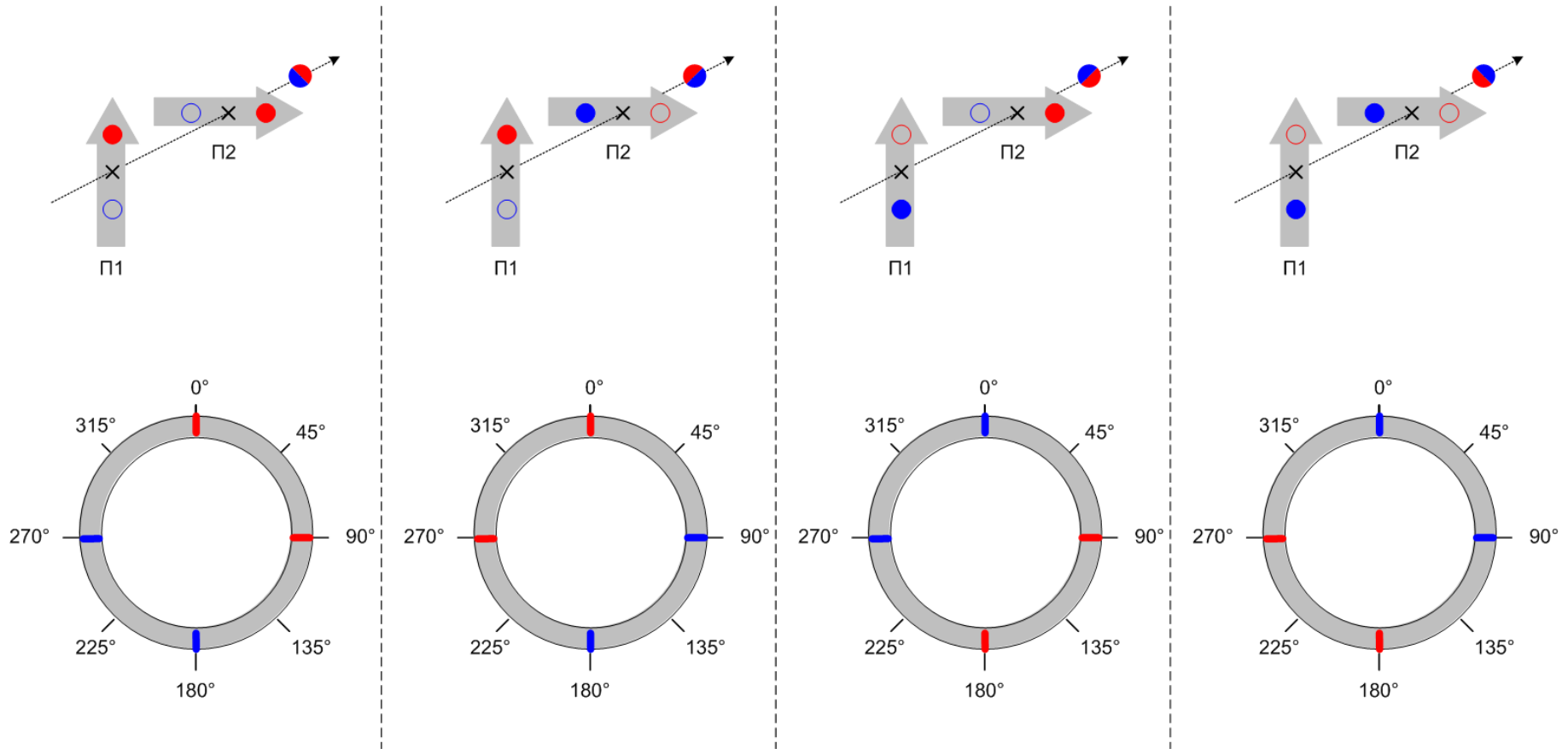
$$[\Pi_1^- \Pi_2^-]$$

$$[\Pi_1^+ \Pi_2^-]$$

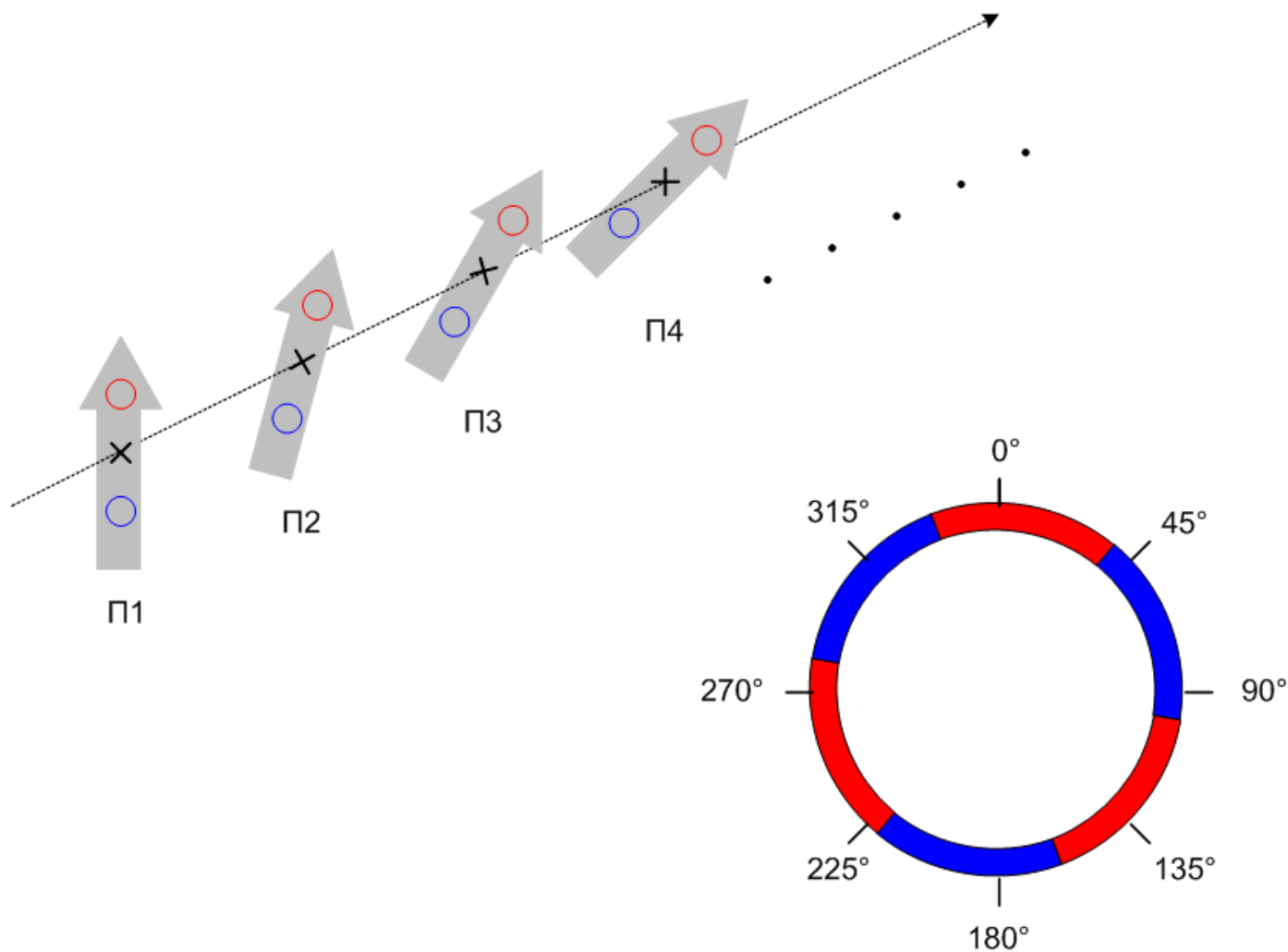
$$[\Pi_1^- \Pi_2^+]$$

Результат эксперимента: корреляция исходов отсутствует

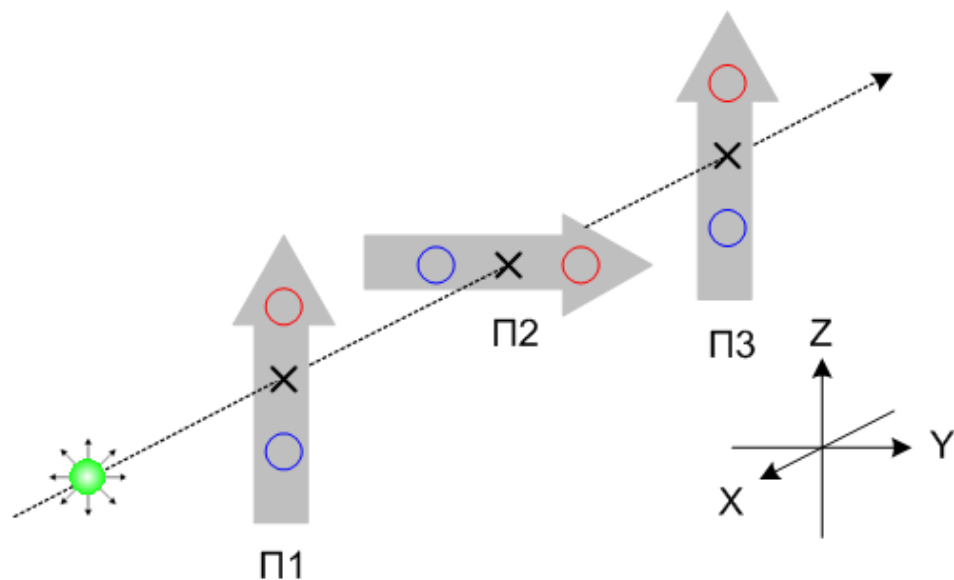
Случайно чередуемые программы?



**Можем ли мы узнать икс-параметр
для всех направлений?**



Три прибора подряд



Возможные исходы:

Только такие?

$$[\pi_1^+ \pi_2^+ \pi_3^+]$$

$$[\pi_1^+ \pi_2^- \pi_3^+]$$

$$[\pi_1^- \pi_2^- \pi_3^-]$$

$$[\pi_1^- \pi_2^+ \pi_3^-]$$

Нет, и такие тоже:

$$[\pi_1^+ \pi_2^+ \pi_3^-]$$

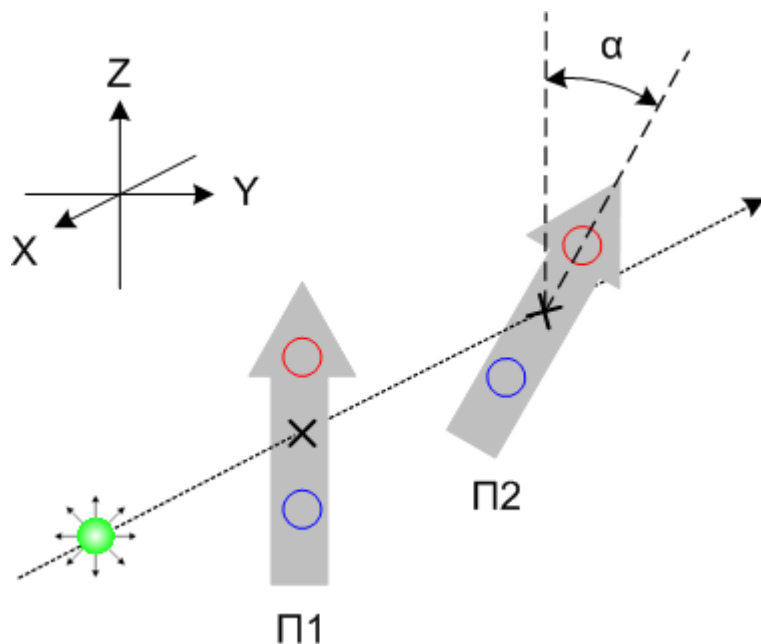
$$[\pi_1^+ \pi_2^- \pi_3^-]$$

$$[\pi_1^- \pi_2^+ \pi_3^+]$$

$$[\pi_1^- \pi_2^- \pi_3^+]$$

Результат эксперимента: при измерении икс-параметр меняется

Измерение в разных базисах



$$\left. \begin{aligned} P[\Pi_1^+ \Pi_2^+] &= \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ P[\Pi_1^- \Pi_2^-] &= \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned} \right\} P[\text{совп}] = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

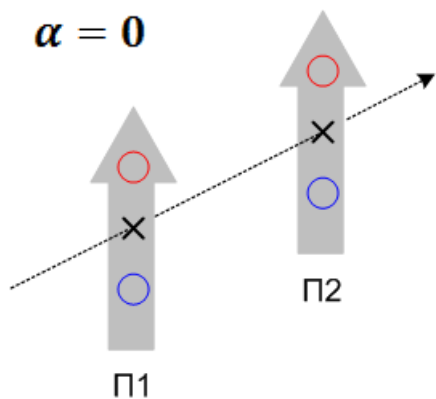
$$\left. \begin{aligned} P[\Pi_1^+ \Pi_2^-] &= \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ P[\Pi_1^- \Pi_2^+] &= \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned} \right\} P[\text{разн}] = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$k_c = P[\text{совп}] - P[\text{разн}] = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Результат эксперимента:
 коэффициент корреляции зависит от угла
 между измерительными базисами

Особые случаи:

$$\alpha = 0$$

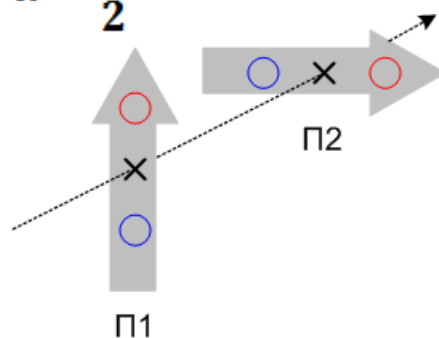


$$P[\text{совп}] = 1$$

$$P[\text{разн}] = 0$$

$$k_c = 1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

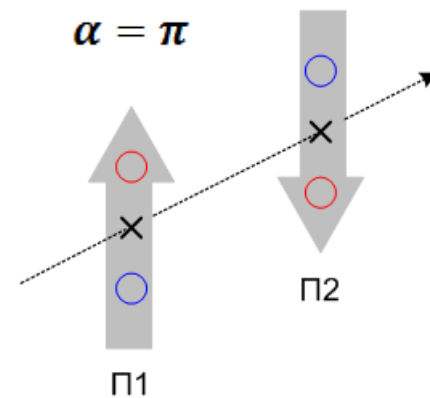


$$P[\text{совп}] = \frac{1}{2}$$

$$P[\text{разн}] = \frac{1}{2}$$

$$k_c = 0$$

$$\alpha = \pi$$



$$P[\text{совп}] = 0$$

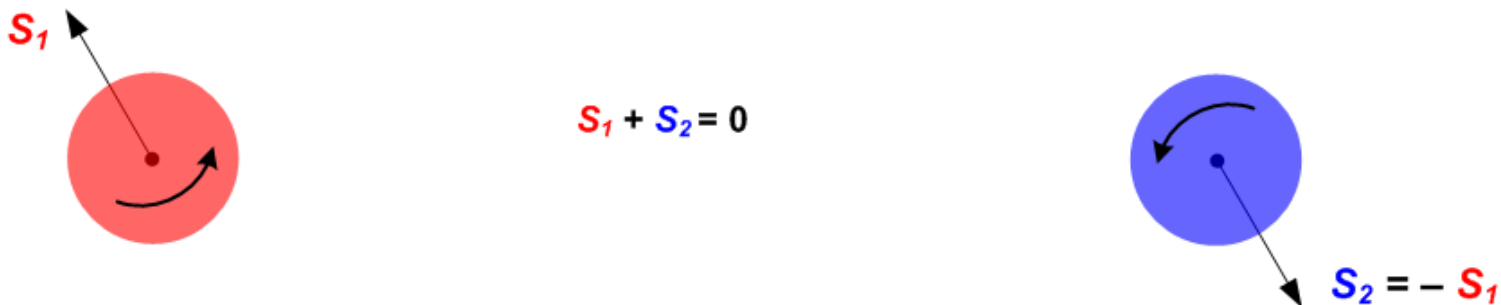
$$P[\text{разн}] = 1$$

$$k_c = -1$$

Исходная частица с нулевым моментом импульса



Распад на две одинаковых частицы –
ЭПР-пара с отрицательной корреляцией по моменту импульса



Инверсия спина синей частицы –
ЭПР-пара с положительной корреляцией по моменту импульса



ЭПР-пара: измерение частиц в одном базисе

Возможные исходы:

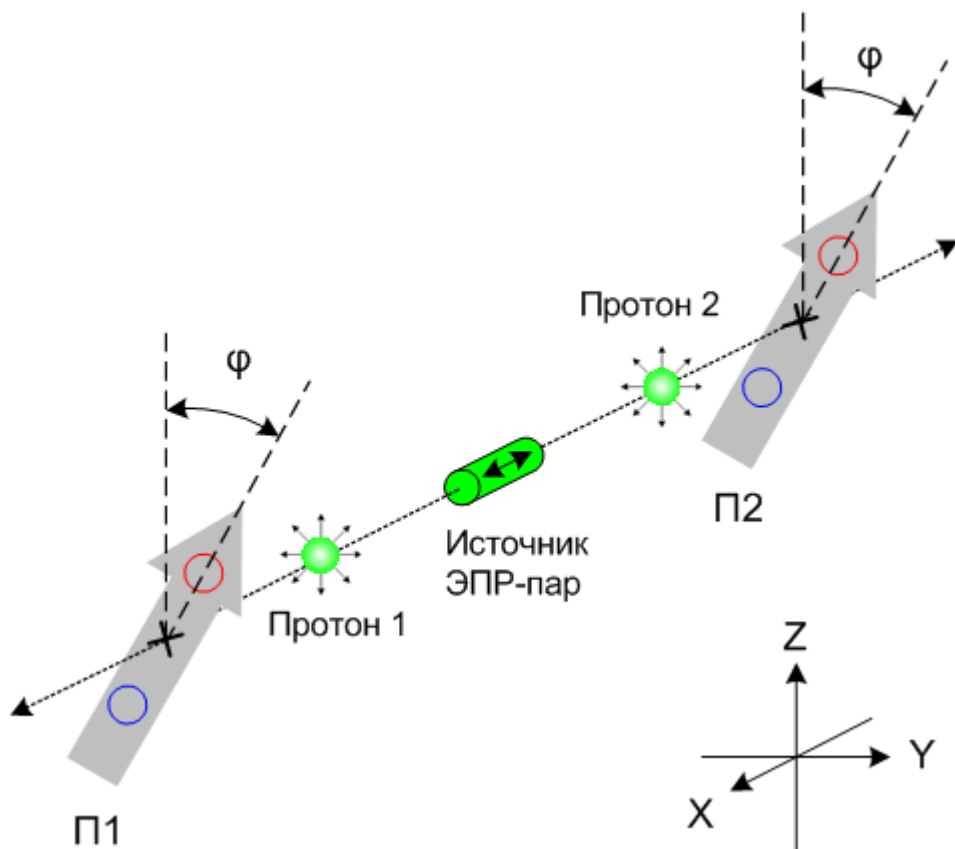
$$[\Pi_1^+ \Pi_2^+]$$

$$[\Pi_1^- \Pi_2^-]$$

Невозможные исходы:

$$[\Pi_1^+ \Pi_2^-]$$

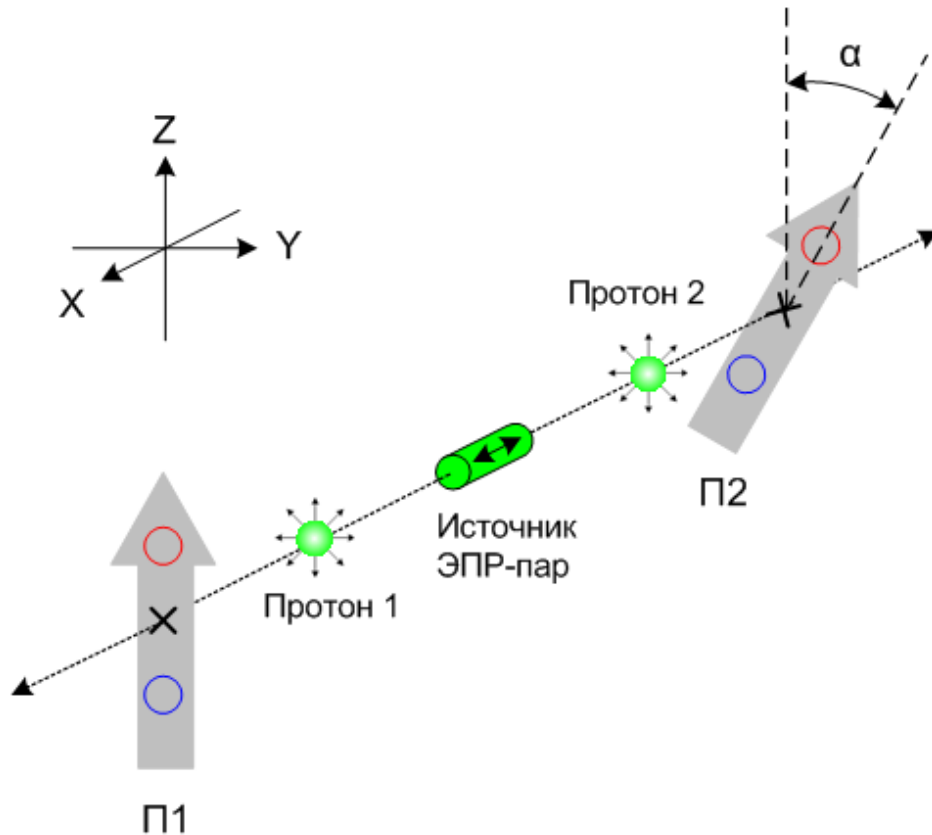
$$[\Pi_1^- \Pi_2^+]$$



Результат эксперимента:

**полная корреляция исходов, как если бы мы дважды
измеряли одну частицу в одинаковых базисах**

ЭПР-пара: измерение частиц в разных базисах



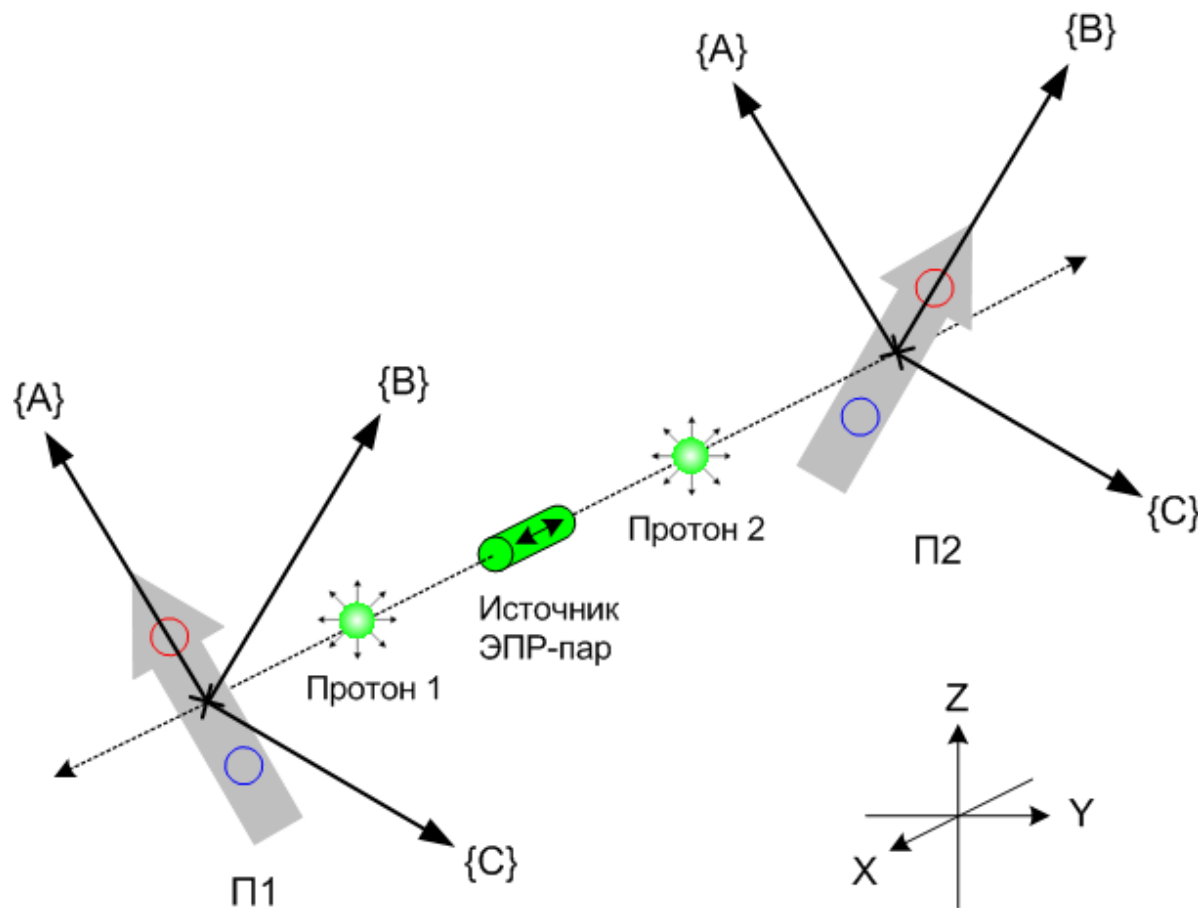
$$P[\text{совп}] = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (1)$$

$$P[\text{разн}] = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (2)$$

Результат эксперимента:
корреляция исходов такая же, как если бы мы дважды
измеряли одну частицу в разных базисах

Схема эксперимента для вывода и проверки неравенства Белла

Конфигурация приборов (измерительный базис) для каждой попытки выбирается случайно. На рисунке конфигурация $\{AB\}$



Возможные
результаты в
конфигурации
 $\{AB\}$:

$$[A_1^+ B_2^+]$$

$$[A_1^+ B_2^-]$$

$$[A_1^- B_2^+]$$

$$[A_1^- B_2^-]$$

Возможные конфигурации:

$\{A A\}$	$\{B A\}$	$\{C A\}$
$\{A B\}$	$\{B B\}$	$\{C B\}$
$\{A C\}$	$\{B C\}$	$\{C C\}$

Вероятность конфигурации:

$$P\{XX\} = \frac{1}{9}$$

24 возможных исхода для разных направлений П1 и П2

6 возможных исходов для одинаковых направлений П1 и П2

$[A_1^+ A_2^+]$

~~$[A_1^+ A_2^-]$~~

$[A_1^- A_2^-]$

~~$[A_1^- A_2^+]$~~

Сорта программ:

$\langle A^+ B^+ C^+ \rangle$
$\langle A^+ B^+ C^- \rangle$
$\langle A^+ B^- C^+ \rangle$
$\langle A^+ B^- C^- \rangle$
$\langle A^- B^+ C^+ \rangle$
$\langle A^- B^+ C^- \rangle$
$\langle A^- B^- C^+ \rangle$
$\langle A^- B^- C^- \rangle$

Классическое предсказание статистики эксперимента

Условия реализации исхода $[A_1^+ B_2^+]$:

1. Конфигурация $\{A B\}$
2. Программа $\langle A^+ B^+ C^+ \rangle$ или $\langle A^+ B^+ C^- \rangle$

Вероятность исхода $[A_1^+ B_2^+]$:

$$P[A_1^+ B_2^+] = P\{A B\} \times (P\langle A^+ B^+ C^+ \rangle + P\langle A^+ B^+ C^- \rangle) \quad (3)$$

$$P[A_1^+ B_2^+] = \frac{1}{9}P\langle A^+ B^+ C^+ \rangle + \frac{1}{9}P\langle A^+ B^+ C^- \rangle \quad (4)$$

Вероятность исхода $[A_1^+ C_2^+]$

$$P[A_1^+ C_2^+] = \frac{1}{9}P\langle A^+ B^+ C^+ \rangle + \frac{1}{9}P\langle A^+ B^- C^+ \rangle \quad (5)$$

Вероятность исхода $[B_1^+ C_2^-]$:

$$P[B_1^+ C_2^-] = \frac{1}{9}P\langle A^+ B^+ C^- \rangle + \frac{1}{9}P\langle A^- B^+ C^- \rangle \quad (6)$$

Суммарная вероятность исходов $[A_1^+ C_2^+]$ и $[B_1^+ C_2^-]$

(5)+(6):

$$P[A_1^+ C_2^+] + P[B_1^+ C_2^-] = \frac{1}{9}P\langle A^+ B^+ C^+ \rangle + \frac{1}{9}P\langle A^+ B^- C^+ \rangle + \frac{1}{9}P\langle A^+ B^+ C^- \rangle + \frac{1}{9}P\langle A^- B^+ C^- \rangle \quad (7)$$

(4) в (7):

$$P[A_1^+ C_2^+] + P[B_1^+ C_2^-] = P[A_1^+ B_2^+] + \frac{1}{9}P\langle A^+ B^- C^+ \rangle + \frac{1}{9}P\langle A^- B^+ C^- \rangle \quad (8)$$

Поскольку вероятность не может быть отрицательной, то:

$$\frac{1}{9}P\langle A^+ B^- C^+ \rangle + \frac{1}{9}P\langle A^- B^+ C^- \rangle \geq 0 \quad (9)$$

Неравенство Белла:

$$P[A_1^+ C_2^+] + P[B_1^+ C_2^-] \geq P[A_1^+ B_2^+] \quad (10)$$

В длинной серии измерений:

$$N[A_1^+ C_2^+] + N[B_1^+ C_2^-] \geq N[A_1^+ B_2^+] \quad (11)$$

Квантовое предсказание статистики эксперимента

Пусть первым измеряется протон **1**, затем протон **2**.

Условия реализации исхода $[A_1^+ B_2^+]$:

1. Конфигурация $\{A B\}$
2. Протон **1** измеряется с исходом $[A_1^+]$
3. Протон **2** измеряется с исходом $[B_2^+]$ (совпадение исходов)

Вероятность исхода $[A_1^+ B_2^+]$:

$$P[A_1^+ B_2^+] = P\{A B\} \times P[A_1^+] \times P[\text{совп}] \quad (12)$$

$$P\{A B\} = \frac{1}{9}$$

$$P[\text{совп}] = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (1)$$

$$P[A_1^+] = \frac{1}{2}$$

$$P[\text{разн}] = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (2)$$

$$P[\text{совп}] = \cos^2\left(\frac{\bar{A}\bar{B}}{2}\right)$$

$$P[A_1^+ B_2^+] = \frac{1}{18} \cos^2\left(\frac{\bar{A}\bar{B}}{2}\right) \quad (13)$$

Вероятность исхода $[A_1^+ B_2^+]$:

$$P[A_1^+ B_2^+] = \frac{1}{18} \cos^2 \left(\frac{\widehat{AB}}{2} \right) \quad (13)$$

Вероятность исхода $[A_1^+ C_2^+]$:

$$P[A_1^+ C_2^+] = \frac{1}{18} \cos^2 \left(\frac{\widehat{AC}}{2} \right) \quad (14)$$

Вероятность исхода $[B_1^+ C_2^-]$:

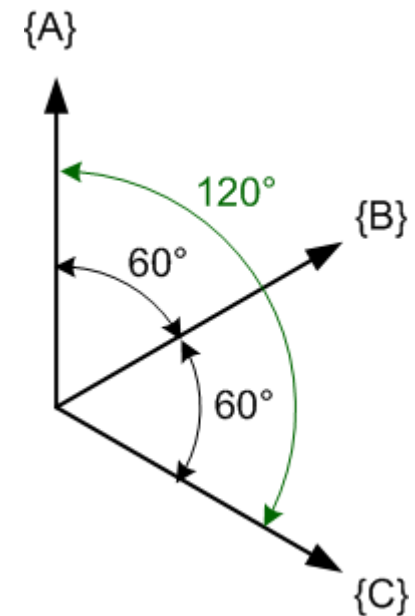
$$P[B_1^+ C_2^-] = \frac{1}{18} \sin^2 \left(\frac{\widehat{BC}}{2} \right) \quad (15)$$

$$P[A_1^+ C_2^+] + P[B_1^+ C_2^-] \geq P[A_1^+ B_2^+] \quad ???$$

$$\cos^2 \left(\frac{\widehat{AC}}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\widehat{BC}}{2} \right) \geq \cos^2 \left(\frac{\widehat{AB}}{2} \right) \quad ???$$

$$\cos^2 \left(\frac{\widehat{AC}}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\widehat{BC}}{2} \right) = \cos^2(60^\circ) + \sin^2(30^\circ) = 0,25 + 0,25 = 0,5$$

$$\cos^2 \left(\frac{\widehat{AB}}{2} \right) = \cos^2(30^\circ) = 0,75$$



$$\widehat{AB} = 60^\circ$$

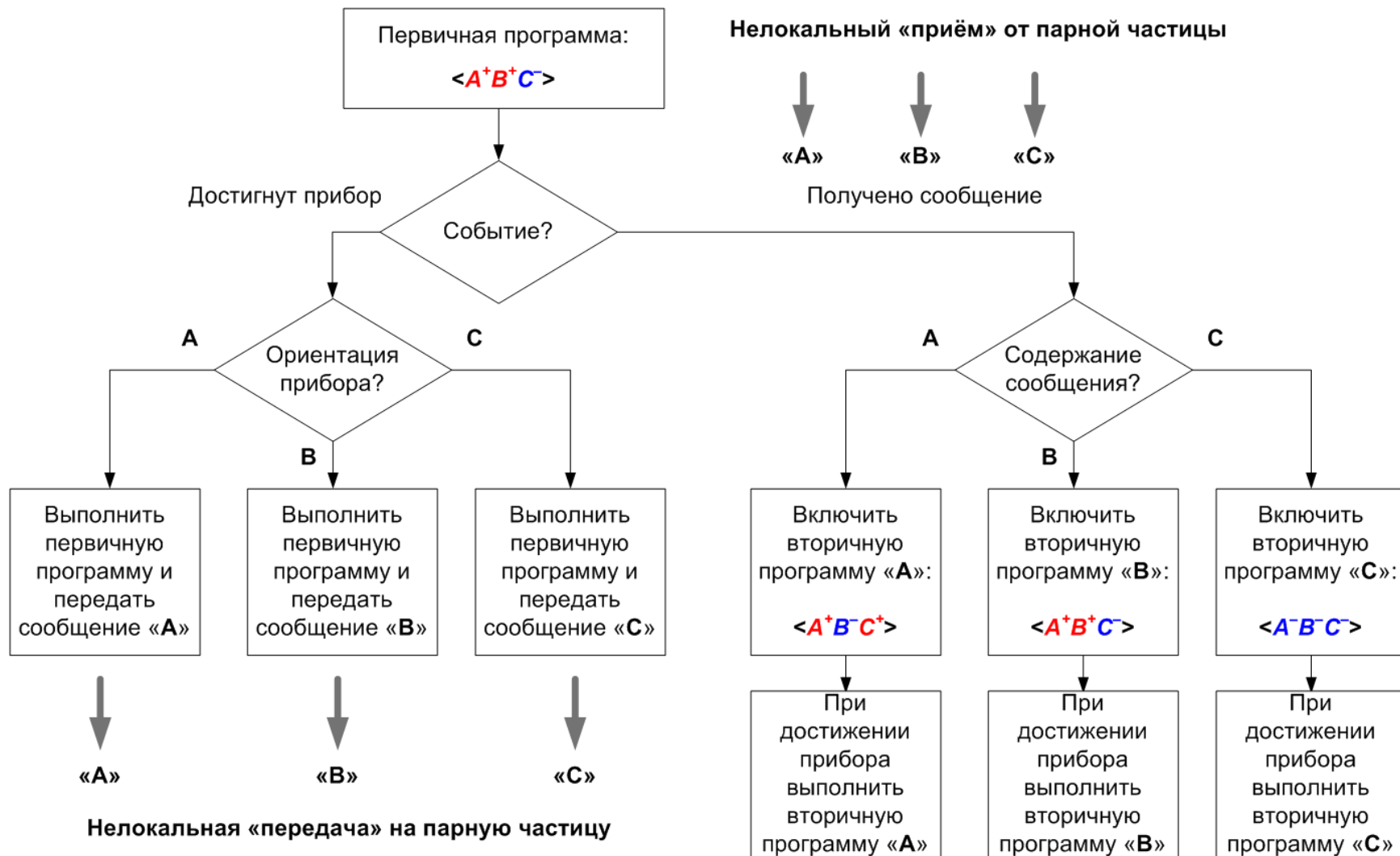
$$\widehat{BC} = 60^\circ$$

$$\widehat{AC} = 120^\circ$$

Результаты эксперимента соответствуют квантовому предсказанию

Локальный реализм опровергнут. А детерминизм?

Программа для одной частицы ЭПР-пары (для второй – такая же)



1. Нелокальное взаимодействие.
2. Теория относительности.
3. Абсолютный детерминизм.

Выберите любые два пункта.

Правильный выбор:

1. Нелокальное взаимодействие.
2. Теория относительности.
- ~~3. Абсолютный детерминизм.~~

Первоисточники

1. Д. Белл. Парадокс Энштейна, Подольского, Розена

2. А. Аспект. Теорема Белла: наивный взгляд экспериментатора

3. А.А. Гриб «Неравенства Белла и экспериментальная проверка квантовых корреляций на макроскопических расстояниях»

4. Р. Фейнман. Фейнмановские лекции. Том 8. Квантовая механика (глава 3)